连续函数的运算与初等函数的连续性

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

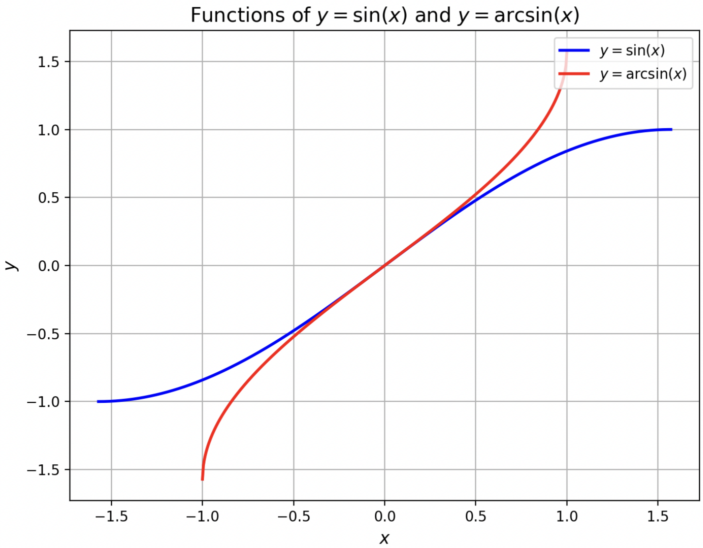
定理 1 (连续函数的和、差、积、商的连续性)

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 处连续, 则它们的和 (差)$f \pm g$, 积 $f \cdot g$ 及商 $\frac{f}{g}$(当 $g(x_0) \neq 0$ 时) 都在点 x_0 连续.

定理 2 (反函数的连续性)

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加 (或单调减少) 且连续, 那么它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y|y=f(x),x\in I_x\}$ 上单调增加 (或单调减少) 且连续.

- $y=\sin x$ 在闭区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上单调增加且连续, 所以它的反函数 $y=\arcsin x[-1,1]$ 上也是单调增加且连续.



Functions of $y = \sin(x)$ and $y = \arcsin(x)$
$y = \sin(x)$
$y = \arcsin(x)$
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
y
x

定理 4 (复合函数的连续性)

设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成，$\mathring{U}(x_0)\subset D_{f\circ g}$. 若函数 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $g(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在 $x=x_0$ 处连续.

定理 4 (复合函数的连续性)

设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成，$U(x_0)\subset D_{f\circ g}$. 若函数 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $g(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在 $x=x_0$ 处连续.

- 考虑函数 $y=\sin\frac{1}{x}, x\in(-\infty,0)$ 的连续性. 该函数可看作 $y=\sin u$ 及 $u=\frac{1}{x}$ 的复合.
- $\forall x\in(-\infty,0)$，$\frac{1}{x}$ 是连续的，且 $u=\frac{1}{x}\in(-\infty,0)$，此外 $\forall u\in(-\infty,0)$，$y=\sin u$ 上是连续的，故复合函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 是连续的.

初等函数的连续性

- 三角函数及反三角函数在它们的定义域内是连续的.

初等函数的连续性

- 三角函数及反三角函数在它们的定义域内是连续的.
- 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调且连续的.

初等函数的连续性

- 三角函数及反三角函数在它们的定义域内是连续的.
- 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调且连续的.
- 有反函数连续性的定理，对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调且连续的.

- 幂函数 $y=x^{\mu}$ 无论幂取何值在区间 $(0,+\infty)$ 总有定义. 因为

$$y=x^{\mu}=e^{\mu\ln x}$$

故幂函数可看作对数函数 $u=\mu\cdot\ln x$ 与指数函数 $y=e^{u}$ 的复合，由复合函数连续性定理，幂函数在区间 $(0,+\infty)$ 上是连续的.

- 幂函数 $y = x^{\mu}$ 无论幂取何值在区间 $(0, +\infty)$ 总有定义. 因为

$$y = x^{\mu} = e^{\mu \ln x}$$

故幂函数可看作对数函数 $u = \mu \cdot \ln x$ 与指数函数 $y = e^{u}$ 的复合, 由复合函数连续性定理, 幂函数在区间 $(0, +\infty)$ 上是连续的.

基本初等函数在其定义区内都是连续的.

- 幂函数 $y = x^{\mu}$ 无论幂取何值在区间 $(0, +\infty)$ 总有定义. 因为

$$y = x^{\mu} = e^{\mu \ln x}$$

故幂函数可看作对数函数 $u = \mu \cdot \ln x$ 与指数函数 $y = e^{u}$ 的复合，由复合函数连续性定理，幂函数在区间 $(0, +\infty)$ 上是连续的.

基本初等函数在其定义区内都是连续的.

一切初等函数在包含于定义域的区间内总是连续的.

利用初等函数的连续性求函数极限

推论

如果 $f(x)$ 是初等函数，且 x_0 是 $f(x)$ 的定义域内的点，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

利用初等函数的连续性求函数极限

推论

如果 $f(x)$ 是初等函数，且 x_0 是 $f(x)$ 的定义域内的点，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

- 点 x_0 是初等函数 $\sqrt{1-x^2}$ 的定义域 $[-1,1]$ 内的点，故 $\lim_{x\to 0}\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-0^2} = 1.$

利用初等函数的连续性求函数极限

定理 3 (极限与函数的交换性)

设函数 $y=f[g(x)]$ 由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成，$\mathring{U}(x_0)\subset D_{f\circ g}$. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$, 而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续, 则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=f[\lim_{x\to x_0} g(x)]=f(u_0)$$

例 5

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

例 5

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}\\ &= \log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]\\ &= \log_a e\\ &= \frac{1}{\ln a}\end{aligned}$$

例 6

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$.

例 6

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$.

解　令 $t=a^x-1$, 故 $x=\log_a(1+t)$. 当 $x\to 0$ 时, $t\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\ln a.$$

例 7

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}(\alpha\in\mathbb{R})$.

例 7

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}(\alpha\in\mathbb{R})$.

解　令 $t=(1+x)^{\alpha}-1$, 当 $x\to 0$ 时, $t\to 0$.

例 7

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}(\alpha\in\mathbb{R})$.

解　令 $t=(1+x)^\alpha-1$, 当 $x\to 0$ 时, $t\to 0$. 在 $t=0$ 及 $x=0$ 的某一个邻域内, 总有 $\ln(1+t)=\alpha\ln(1+x)$. 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{t}{\cancel{\ln(1+t)}}\cdot\frac{\alpha\cancel{\ln(1+x)}}{x}\right]$$

例 7

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}(\alpha\in\mathbb{R})$.

解　令 $t=(1+x)^\alpha-1$, 当 $x\to 0$ 时, $t\to 0$. 在 $t=0$ 及 $x=0$ 的某一个邻域内, 总有 $\ln(1+t)=\alpha\ln(1+x)$. 故

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{t}{\cancel{\ln(1+t)}}\cdot\frac{\cancel{\alpha\ln(1+x)}}{x}\right]\\&=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=1\cdot\alpha=\alpha.\end{aligned}$$

例 8

求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

例 8

求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解　存在 $\mathring{U}(x_0)$, 使得 $\forall x \in \mathring{U}(x_0)$, 有 $f(x) > 0$,

故 $f(x) = e^{\ln f(x)}, \forall x \in \mathring{U}(x_0)$.

例 8

求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解　存在 $\mathring{U}(x_0)$, 使得 $\forall x\in\mathring{U}(x_0)$, 有 $f(x)>0$,

故 $f(x)=e^{\ln f(x)}, \forall x\in\mathring{U}(x_0)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}} &= \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{3\ln(1+2x)}{2x}\cdot\frac{2x}{\sin x}\right]}\end{aligned}$$

例 8

求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$

解　存在 $\mathring{U}(x_0)$, 使得 $\forall x\in\mathring{U}(x_0)$, 有 $f(x)>0$,

故 $f(x)=e^{\ln f(x)}, \forall x\in\mathring{U}(x_0)$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}} &= \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{3\ln(1+2x)}{2x}\cdot\frac{2x}{\sin x}\right]}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\ln(1+2x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x}}\\
&= e^{3\cdot 2} = e^{6}.
\end{aligned}
$$

幂指函数求极限

形如 $u(x)^{v(x)}(u(x)>0,u(x)\neq 1)$ 的函数称为幂指函数. 如果

$$\lim u(x)=a(a>0) \quad \lim v(x)=b,$$

则

$$\lim u(x)^{v(x)}=a^{b}.$$

这里 lim 指同一个自变量的变化过程.

作业

- 教材习题 1-9: 1; 3(1)(4)(7); 4(1); 6.